Εφαρμογές – Ασκήσεις στα Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων
(Βιβλ. Ντούγια)

4.19) α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(x)>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. ΝΔΟ $(\exists k>0): f(x)\geq k$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

β) Έστω $f$ μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0$ και έστω $f(x_0)>k$. ΝΔΟ $(\exists\delta>0): f(x)>k$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

γ) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. ΝΔΟ η $f$ έχει θετικό infimum.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και $f(x)>0$

Η $g$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, εφόσον η $f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Άρα, από θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου είναι η $g$ φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow |g(x)|\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{M}$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

όπου αρκεί $\frac{1}{M}=k>0$.

β) Έστω συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-k$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.
Εφόσον, $f$ συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \varphi$ συνεχής στο $x_0$ διότι το $k=$σταθ. και λόγω ότι $f(x_0)>k\Rightarrow f(x_0)-k>0$ $\Rightarrow \varphi(x_0)>0$ τότε γνωρίζουμε ότι:
$(\exists\delta>0): \varphi(x)>0$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

γ) Έστω $m=\inf\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$
Το $k$ όμως, αποτελεί ένα κάτω φράγμα της $f$.
Άρα, όπως είδαμε στο (α) $f(x)\geq k$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$
συνεπώς, $m=\inf\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}=f(x_\varepsilon)>0$.

4.20) ΝΔΟ οι συναρτήσεις είναι φραγμένες στα διαστήματα $[0,1]$ και $[-1,0]$, αντίστοιχα.

$$\alpha.\ f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \beta.\ g(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|}, & -1\leq x<0 \\ 0, & 0=x \end{cases}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. Αν $f$ συνεχής $\Rightarrow$ $f$ φραγμένη.

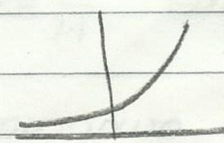
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$ ως φραγμένη επί μηδενική

Άρα, η $f$ φραγμένη στο $[0,1]$.

β.

$$g(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|}, & -1\leq x\leq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} = \begin{cases} e^{1/x}, & -1\leq x\leq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 = f(0)$$



Άρα, η $g$ φραγμένη στο $[-1,0]$

4.26) Μπορεί η συνάρτηση $f(x) = 3 - ημx + \frac{x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ στο διάστημα $[-2,2]$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι $f$ συνεχής στο $[-2,2]$ ως πράξεις συνεχών.
Και θέλουμε $f(x_0) = \frac{7}{3}$ $\forall x \in [-2,2]$
Έστω το διάστημα
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq [-2,2]$ καθώς $f(-\frac{\pi}{2}) = 4 - \frac{\pi^3}{32} \neq 2 + \frac{\pi^3}{32} = f(\frac{\pi}{2})$
Άρα, από Θ.Ε.Τ ($\exists x_0 \in (-2,2)$) ώστε
$f(x_0) = n$, όπου η μεταξύ των $f(-\frac{\pi}{2})$ & $f(\frac{\pi}{2})$
Όπου, λόγω ότι $f(-\frac{\pi}{2}) \leq \frac{7}{3} \leq f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(-2) \leq \frac{7}{3} \leq f(2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0) = \frac{7}{3}$.

4.28) ΝΔΟ η εξίσωση $x = συνx$ έχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x) = x - συνx$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ συνεχής σε αυτό
$f(0) = -1 < 0$ & $f(\pi/2) = 1 > 0$
Άρα, από Θ.Bolzano $\exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$: $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = συνx_0$

4.30) Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(1)$
ΝΔΟ $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ : $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ συνεχής σε αυτό
$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2})$
$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -(f(0) - f(\frac{1}{2})) = -g(0)$.
Άρα, $g(0) \cdot g(\frac{1}{2}) = -g^2(0) = -(f(0) - f(\frac{1}{2}))^2 \leq 0$
1ον) Αν $g(0) \cdot g(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \xi_1 = 0$ ή $\xi_2 = \frac{1}{2}$. ρίζες

2ον) Αν $g(0) \cdot g(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0, \frac{1}{2})$ $g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$

Άρα, θα $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ : $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$

4.31) ΝΔΟ η εξίσωση $x = \alpha \cdot \eta\mu x + \beta$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ έχει $x_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $0 \leq x_0 \leq \alpha + \beta$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε $g(x) = x - \alpha\,\eta\mu x - \beta$, $\forall \beta > 0$ και $0 < \alpha < 1$

- Η $g$ συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $[0, \alpha+\beta]$
- $g(0) = -\beta < 0$ & $g(\alpha+\beta) = \underset{>0}{\alpha} \cdot (1 - \eta\mu\underset{>0}{(\alpha+\beta)}) \geq 0$

Επομένως, $g(0) \cdot g(\alpha+\beta) \leq 0$

$g(0) \cdot g(\alpha+\beta) < 0$

Από Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα $x_0 \in (0, \alpha+\beta)$ (δηλ. $x_0 > 0$) ώστε:

$g(x_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = \alpha\,\eta\mu x_0 + \beta$.

$g(0) \cdot g(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \xi = 0$ ή $\xi = \alpha+\beta$.

Συνολικά θα $\exists x_0 \in [0, \alpha+\beta]$ ώστε: $x_0 = \alpha \cdot \eta\mu x_0 + \beta$.